Клуб младих математичара "Архимедес" Београд

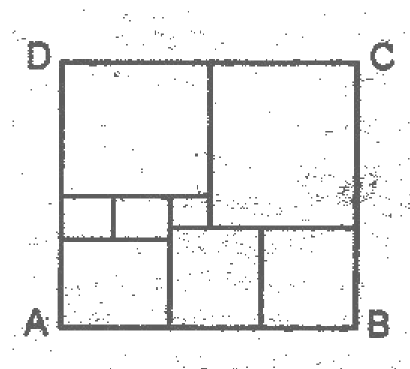
Дописна математичка олимпијада 2006

I коло **1. октобар 2006.**

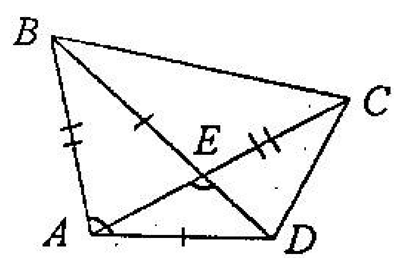
<u>VIII разред</u>

1. На квадратној табли са 10×10 поља распоређени су жетони тако да на свакој вертикалној линији стоји различит број жетона (може бити и 0), а такође и на свакој хоризонталној линији стоји различит број жетона (може бити и 0). Колико свега жетона може бити тако распоређено на табли? Одреди све могућности и покажи да других нема.

2. Три ученика играју следећу игру: сваки од њих записује по 100 речи, а онда упоређују своје записе. Ако су двојица записала исту реч, она се прецртава из свих спискова. Може ли се десити да, после тога, првом играчу остану непрецртане 54 речи, другом 75 речи, а трећем 80 речи? Образложи!



3. Правоугаоник ABCD разрезан је на квадрате, како је показано на слици. Зна се да дужина странице AB износи 32 cm. Одредити дужину странице AD.



4. Дијагонале четвороугла ABCD секу се у тачки E. Зна се да је AB=CE, BE=AD, ∠AED=∠BAD. Докажите да је BC>AD.

5. Бројеви a и b су цели. Зна се да је $a+b=100$. Може ли збир $8a+3b$ имати вредност 2006?

Решења треба образложити!

КММ "Архимедес"

Решења:

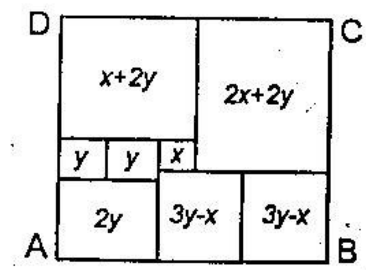
1. Одговор: 45 или 55 жетона.

Ако на било којој од хоризонталних линија стоји 10 жетона (највише што се може поставити на једну линију), онда то значи да ће постојати хоризонтална линија на којој ће стајати 1 жетон (јер на свим линијама број жетона треба да буде различит). Укупан број потребних жетона је тада $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=(1+10)+(2+9)+\ldots=5\cdot 11=55$.
Ако, пак, једну линију оставимо без жетона, онда ће бити употребљено

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 \text{ жетона.}$$

2. Није се могло десити. Првом играчу је прецртано 46 речи, другом 25 речи, а трећем 20 речи. Како је $25+20<46$, значи да је код првог играча прецртано више речи него код друге двојице заједно, тј. прецртане су и неке речи којих код осталих нема.

3. Одговор: 29 cm.

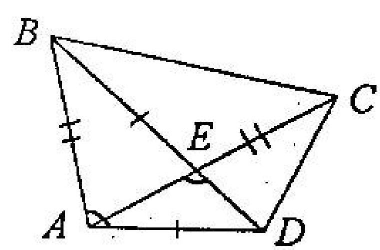


Означимо са x и y странице најмањег и следећег по величини квадрата, а затим изразимо странице свих осталих квадрата помоћу x и y. После тога, решавамо једначине

$$AB = CD = 32 \text{ cm},$$

тј. $2y+3y-x+3y-x=32$ и $x+2y+2x+2y=32$
одакле добијамо $x = 4$ cm и $y = 5$cm.
Странице свих осталих квадрата су једнозначно одређене.

4. Углови $\angle AED$ и $\angle BEC$ су једнаки као унакрсни.



Одавде следи да су троуглови ABD и ECB подударни јер имају по две једнаке странице и захваћени угао, па даље закључујемо $BC = BD > BE = AD$, што је и требало доказати.

5. $8a+3b = 5a + 3a + 3b = 5a +3(a+b) = 5a+300 = 5(a+60)$.

Требало би да буде $5(a+60)=2006$. Међутим, лева страна је дељива са 5, а број 2006 није дељив са 5. Дакле, одговор је: не може!
Постоје и други начини!