Задаци и решења

Клуб младих математичара "Архимедес"- Београд

"*М И С Л И Ш А*"

Математичко такмичење за ученике ОШ

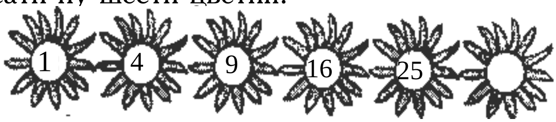
по угледу на

Међународно такмичење "КЕНГУР"

2008 **7. разред**

Задаци који се оцењују са 3 бода

1. У цветиће су уписани бројеви по неком правилу. Који број треба уписати ну шести цветић?

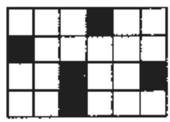


(A) 27 (B) 28 (C) 30 (D) 32 (E) 36

Решење: (E) 36

Ради се о низу бројева којег чине редом квадрати природних бројева.

2. Колико белих поља на овој слици треба обојити црном бојом па да број црних поља буде једнак половини броја белих поља?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

(E) такво бојење је немогуће

Решење: (B) 3

Велики правоугаоник састоји се из $6\cdot4=24$ поља. Тражи се однос црних и белих поља буде 1:2, тј. да црних поља буде 8, а белих 16. Како на слици већ видимо 5 црних поља, значи да треба обојити још 3 поља да би био испужен тражени услов.

3. Колико међу наведеним бројевима има рационалних:

$$0;\ -2;\ \sqrt{2}-1;\ 1{,}73;\ \sqrt{5};\ 3{,}14;\ \pi;\ 13{,}333\ldots;\ \sqrt{49};\ \frac{23}{2008}.$$

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Решење: (E) 7

(То су бројеви: $0;\ -2;\ 1{,}73;\ 3{,}14;\ 13{,}333\ldots;\ \sqrt{49};\ \frac{23}{2008}$)

4. Шестина и по неког броја износи 5. Који је то број?

(A) 60 (B) 20 (C) 12 (D) 6 (E) 1

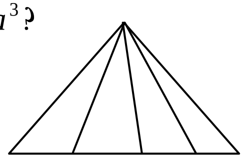
Решење: (B) 20

Шестина и по значи шестина и још половина од шестине, а то значи шестина и још дванаестина, тј. $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$. Другим речима, тражи се број чија четвртина износи 5.

5. Израз $2a^2\cdot 3a$ се другачије може записати:

(A) $5a^2$ (B) $5a^3$ (C) $6a$ (D) $6a^2$ (E) $6a^3$?

Решење: (E) $6a^3$



6. Колико на овој слици видите троуглова?

(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7 (E) 6

Решење: (A) 10.

Постоји више начина да извршимо пребројавање троуглова. Рецимо, да бројимо по плану од мањих ка све већим и већим троугловима (4+3+2+1=10), или да уочимо да на овој слици има онолико троуглова колико се дужи може избројати на основици великог троугла, тј. (5·4):2=10.

7. Колико овде има погрешних једнакости:

а) $2+3^2=11$

б) $-5^2+6=-19$

в) $-10\cdot(-0{,}3)^2=-10\cdot(-0{,}09)=0{,}9$

г) $\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot(-3)^2-0{,}5^2:\left(\frac{1}{2}\right)^3=18$

д) $\left(1-\sqrt{\frac{16}{25}}\right)\cdot 1\frac{2}{3}:\frac{1}{6}=2$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Решење: (B) 2

Нетачне су једнакости **в)** и **г)**, јер је:

в) $-10\cdot(-0{,}3)^2=-10\cdot 0{,}09=-0{,}9$

г) $\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot(-3)^2-0{,}5^2:\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{16}{9}\cdot 9-0{,}25:\frac{1}{8}=16-\frac{1}{4}\cdot 8=14$

8. Колико дијагонала има конвексан десетоугао?

(A) 8 (B) 20 (C) 27 (D) 35 (E) 39

Решење: (D) 35, јер је број дијагонала конвексног многоугла

$D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$, па је $D_{10} = \dfrac{10 \cdot 7}{2} = 35$.

<u>**Задаци који се оцењују са 4 бода**</u>

9. Која од следећих формула је тачна <u>само</u> за a=0?

(A) $-a^2 = (-a)^2$ (B) $-a^3 = (-a)^3$ (C) $a^2 = a^3$ (D) $a^3 = a$ (E) $a^2 = a$

Решење: (A) $-a^2 = (-a)^2$

Дате формуле тачне су редом: (A) само за a=0, (B) за свако $a \in$R, (C) за $a \in \{0, 1\}$, (D) за $a \in \{-1, 0, 1\}$, (E) за $a \in \{0, 1\}$.

10. Нека је a цео број. Која тврдња је тачна за свако $a \in$Z?

(A) a је позитиван број (B) a+2 је паран број (C) 3a>a

(D) a(a+1) је дељив са 2 (E) 2a+1<2a

Решење: (D) a(a+1) је дељив са 2, јер су a и a+1 узастопни бројеви

Образложење:

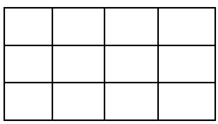
(A) a је позитиван број – **није тачно** јер може бити нпр. $a = -5$

(B) a+2 је паран број – **није тачно** за a непарно

(C) 3a>a – **није тачно** за a≤0

(E) 2a+1<2a – **није тачно** јер је 2a претходник броја 2a+1

11. Јанко је чоколаду као на слици изломио на 12 “коцкица”. Колико пута је Јанко вршио ломљење?

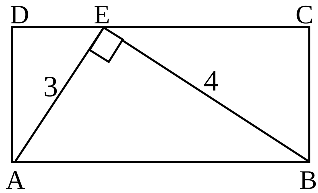


(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 11 (E) 12

Решење: (D) 11

Било којим редом да се врши ломљење, број ломљења је увек за 1 мањи од броја добијених комадића! Изврши "пробу" на више различитих случајева!

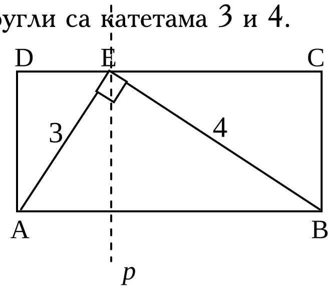
12. Четвороугао $ABCD$ којег видимо на слици је правоугаоник. Према подацима са слике израчунајте површину тог правоугаоника.



(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 17 (E) 18

Решење: (A) 12.

Према подацима са слике, троугао ABE је правоугли са катетама 3 и 4. Његова површина је $(3 \cdot 4):2=6$.



Ако сада повучемо праву p, на слици видимо два нова правоугаоника од којих је сваки катетом троугла ABE подељен на два подударна троугла. То значи да је површина правоугаоника једнака двострукој површини троугла ABE, тј. $P=2 \cdot 6=12$.

13. Међу наведеним бројевима највећи је:

(A) 2^{32} (B) 4^{15} (C) 8^{11} (D) 16^{8} (E) 32^{6}

Решење: (C) 8^{11}. Све бројеве треба претворити у степене са основом 2: 2^{32}; $4^{15}=2^{30}$; $8^{11}=2^{33}$; $16^{8}=2^{32}$; $32^{6}=2^{30}$.

14. Колико је $(-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \cdot \ldots \cdot (-1)^{2006} \cdot (-1)^{2007} \cdot (-1)^{2008}$?

(A) −2008 (B) −1 (C) 0 (D) 1 (E) 2008

Решење: (D) 1, јер у датом изразу има паран број негативних фактора.

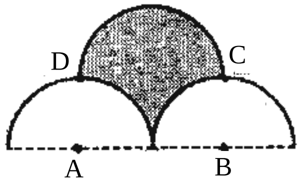
15. Дат је круг полупречника r. Колико има кругова полупречника r који додирују дати круг, а и међусобно се додирују два по два?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Решење: (D) 6

Обележимо са O центар датог круга, а са O_1 и O_2 центре двају од суседних тражених кругова. Тада је ΔOO_1O_2 једнакостраничан, па се даље лако уверавамо да је одговор 6.

16. Свака од три полукружнице има полупречник 2 cm. Четвороугао ABCD је правоугаоник. Изрази (у cm^2) површину осенчене фигуре.

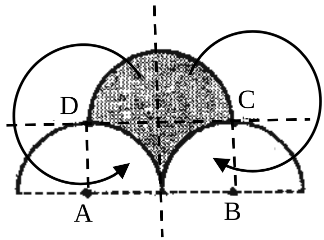


(A) 7 (B) $2\pi-1$ (C) 8 (D) 2π (E) $2\pi+1$

Решење: (C) 8

Осенчену фигуру разрежемо и пресложимо као што је приказано на слици!

Тражена површина једнака је површини правоугаоника ABCD.



17. Сава чува у кутији 8 црвених, 5 плавих и 3 жута кликера. Колико најмање кликера треба Сава да узме из кутије, не гледајући у кутију, да би био сигуран да је узео 3 разнобојна кликера?

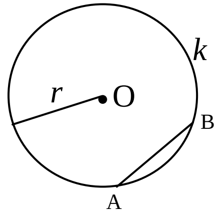
(A) 16 (B) 15 (C) 14 (D) 13 (E) 11

Решење: (C) 14.

Треба посматрати најнеповољнији случај, тј. случај када за редом из кутије извучемо све црвене и све плаве кликере. Тек ће следећи (14.) кликер бити жути, и заједно са претходно извученим кликерима двеју боја, бићемо сигурни да међу извученим кликерима имамо 3 разнобојна.

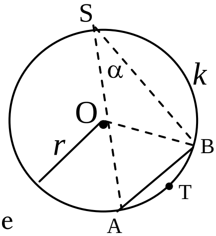
<u>Задаци који се оцењују са 5 бодова</u>

18. На кружници k полупречника r изабране су тачке A и B тако да је AB=r. Под којим углом се дуж AB (тетива круга) види из ма које тачке кружнице k (различите од уочених тачака A и B)?



(A) 60° (B) 90° (C) 30° или 120°
(D) 30° или 150° (E) 60° или120°

Решење: (D) 30^0 или 150^0



Троугао AOB је једнакостранични (према условима задатка. Угао AOB је централни угао, а ASB је њему одговрајући периферијски угао, па је угао ASB=30^o. Међутим, тетива AB се може посматрати и из било које тачке T лука AB на датој кружници. Угао под којим се тада види тетива AB је 150^o, јер је то периферијски угао коме одговара централни угао ASB од 300^0 (допуна угла AOB=60^0 до 360^0)

19. Написана су два броја – први и други. Првом броју додат је други и тако је добијен трећи број. Другом броју додат је трећи и тако је добијен четврти број, и тако даље. Чему ће бити једнак збир шест написаних бројева, ако пети број износи 7?

(A) 28 (B) 26 (C) 24 (D) 22 (E) 20

Решење:. (A) 28

Означимо први број са a, а други са b. Кад првом броју додамо други добијамо трећи, што у нашем случају износи $a+b$. Даље, другом броју додајемо трећи и добијамо $a+2b$. Ако тако продужимо даље, према услову задатка, добићемо низ бројева:

$$a, b, a+b, a+2b, 2a+3b=7, 3a+5b, \ldots$$

Тражени збир шест тако насталих бројева је:

$$a+ b+ a+b+ a+2b+ 2a+3b+ 3a+5b=8a+12b=4(2a+3b)=4\cdot 7=28$$

20. Воја је замислио прост троцифрен број чије су све цифре различите. Која цифра може бити последња цифра тога броја, ако се зна да је она једнака збиру прве две цифре тога броја?

(A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 3 или 1 (E) немогуће је одредити

Решење: (C) 7

То може бити само цифра 7.

Најпре је сигурно да последња цифра тога броја не може бити цифра 1. Даље, како се ради о простом броју, последња цифра не може бити ни 0, 2, 4, 6, 8, али ни цифра 5. Ако би последња цифра била 3 или 9, онда би збир цифара тога броја био једнак двострукој последњој цифри, што би значило да је тај број дељив са 3 (дакле, опет није прост). Тако нам коначно остаје само цифра 7.

21. Нађите 2008. цифру после запете (зареза) у децималном запису разломка $\frac{1}{7}$.

(A) 1 (B) 2 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Решење: (D) 8

Како је $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots = 0{,}(142857)$, тј, периодични разломак са периодом од 6 децимала (142857) и како је 2008=6·334+4, значи да ће на 2008. месту бити четврта цифра у 335. периоду децималног записа броја $\frac{1}{7}$, а четврта цифра у свакој периоди је цифра 8.

22. Ако је $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$, онда вредност полинома $P(x, y) = x^{2008} + 2008y$ износи:

(A) 0 (B) 2008 (C) 4015 (D) 4016 (E) 4017

Решење: (E) 4017

Пошто је:

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 =$

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0,$

што је могуће само ако је сваки од сабирака једнак нули, тј. $x+1=0$ и $y-2=0$, одакле је $x=-1$ и $y=2$.

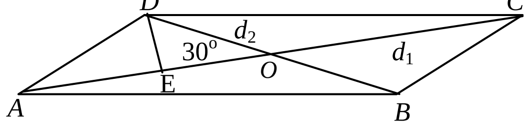
Сада израчунавамо вредност полинома:

$P(-1,\ 2) = (-1)^{2008} + 2008 \cdot 2 = 1 + 4016 = 4017.$

23. Колика је површина паралелограма чије се дијагонале $d_1 = 12$ cm и $d_2 = 9$ cm секу под углом од 30°?

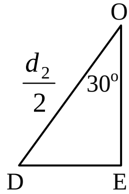
(A) 21 (B) 25 (C) 27 (D) 28 (E) 29

Решење: (C) 27



У овом задатку је веома погодно да се површина паралелограма посматра као збир површина два подударна троугла (ABC и ACD). Основица троугла ACD је дијагонала d_1, а висина DE. Остаје нам сада да висину DE изразимо помоћу d_1 или d_2 (јер су нам то једини познати подаци). Посматраћемо зато правоугли троугао EOD:

С обзиром да му је један оштар угао 30°, закључујемо да му је други оштар угао 60°, па тај троугао представља половину замишљеног једнакостраничног троугла чија је страница $\frac{d_2}{2}$. Дуж DE је тада половина странице тог замишљеног једнакостраничног троугла, па је она зато $DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_2}{4}$



Према томе, површина паралелограма је:

$$P = 2 \cdot \frac{AC \cdot DE}{2} = AC \cdot DE = d_1 \cdot \frac{d_2}{4} = \frac{d_1 \cdot d_2}{4} = \frac{12 \cdot 9}{4} = 3 \cdot 9 = 27$$

24. Познато је да се од пет датих дужи могу саставити четири различита правоугла троугла. Наћи однос између најмање и највеће од тих дужи.

(A) $1 : \sqrt{2}$ (B) 1:2 (C) $1 : \sqrt{5}$ (D) 1:4 (E) 1:5

Решење: (C) $1 : \sqrt{5}$

Уредимо дате дужи у растућем поретку: $a \le b \le c \le d \le e$. Хипотенузе одговарајућих троуглова могу бити само c, d и e. При томе e може бити хипотенуза двају различитих троуглова. Зато имамо: $c^2 = a^2 + b^2$, $d^2 = a^2 + c^2$, $e^2 = a^2 + d^2 = b^2 + c^2$ и $e = a\sqrt{5}$.

(a, $b = a\sqrt{2}$, $c = a\sqrt{3}$, $d = a\sqrt{4} = 2a$, $e = a\sqrt{5}$)

25. Колики је збир површина свих квадрата који се могу уочити на квадратној мрежи 5×5, ако је површина квадрата 1×1 једнака 1 cm^2.

(A) 25 (B) 121 (C) 225 (D) 259 (E) 360

Решење: (D) 259

На квадратној мрежи 5×5 можемо уочити 5·5+4·4+3·3+2·2+1·1=55 квадрата. Међутим они нису сви истих димензија, односно површина. Наиме, на квадратној мрежи 5×5 можемо уочити 5×5=25 квадратића странице 1 cm, 4×4=16 квадрата странице 2 cm, 3×3=9 квадрата странице 3 cm, 2×2 квадрата странице 4 cm и коначно 1×1 квадрат странице 5 cm. Њихова укупна површина је: 25·1+16·4+9·9+4·16+1·25=25+64+81+64+25=259.