Задаци и решења

Клуб младих математичара "Архимедес"- Београд

"*М И С Л И Ш А*"

Математичко такмичење за ученике СШ

по угледу на

Међународно такмичење "КЕНГУР"

2008 — 3. разред

Задаци који се оцењују са 3 бода

1. Двадесет ипо процената од 100 колико је то?

(A) 45 (B) 40 (C) 35 (D) 30 (E) 25

Решење: (D) 30

$$1\frac{1}{2}\cdot 20\%\cdot 100=\frac{3}{2}\cdot 0{,}2\cdot 100=30$$

2. Којем међу наведеним низовима бројева ту није место?

(A) 2, 2, 2, 2, ...

(B) 7, 14, 28, 56, ...

(C) 2, 4, 5, 8, ...

(D) $3, -3, \ 3, -3,$ ....

(E) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8},$ ....

Решење: (C) 2, 4, 5, 8, ... Правило: количник два узастопна члана је исти: код (A) је 1, код (B) је 2, код (D) је -1, код (E) је $-1/2$.

3. *Сетимо се Гауса!*

Колико је: 1+3+5+7+ . . . + 997+999 ?

(A) 500 (B) 1000 (C) 2500 (D) 25000 (E) 250000

Решење: (E) 250000

Тражи се збир свих непарних бројева из прве хиљаде. Њих има укупно 500 (500 парних и 500 непарних). Тих 500 бројева (сећајући се Гауса) групишемо у 250 парова:

$$(1+999)+(3+997)+(5+995)+\ .\ .\ .\ +(449+551)$$

Како сваки од ових парова вреди 1000, коначно решење ће бити: $250 \cdot 1000 = 250000$.

4. За које вредности од x је тачна једнакост $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$.

(A) за свако $x \in R$ (B) само за $x \geq 1$ (C) само за $x \leq 1$
(D) само за $x=1$ (E) ни за једно x.

Решење: A) за свако $x \in R$

5. Једначина праве која пролази тачком $M(1,-1)$ и паралелна је y-оси је:

(A) $x=1$ (B) $y=-1$ (C) $y=-x$ (D) $y=x$ (E) $x+y+1=0$

Решење: (A) $x=1$

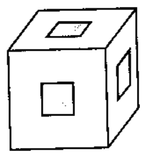
6. Ако је $a+b=3$, $b+c=4$ и $c+a=5$, онда је $a+b+c$ једнако:

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 12

Решење: (A) 6. Сабирањем датих једнакости добијамо:

$2(a+b+c)=12$, одакле је $a+b+c=6$.

7. Кроз коцку ивице 3 cm просекли су, паралелно ивицама, три квадратна отвора ширине 1 cm (као на слици). Запремина преосталог дела коцке је:

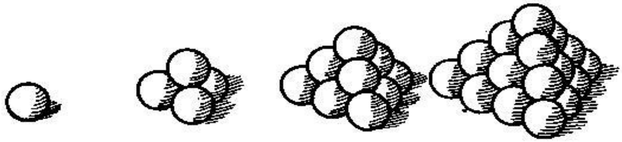


A) 16 B) 18 C) 20 D) 21 E) 24

Решење: C) 20

Цела коцка је имала 27 јединичних коцкица. Исечено је 6+1=7 јединичних коцкица, па је запремина добијеног тела 20.

8. Све своје кликере Пера је једног дана поређао како је показано на слици:



Колико је укупно кликера Пера за то употребио?

(A) 32 (B) 34 (C) 35 (D) 36 (E) 41

Решење: (C) 35, јер је редом употребљено 1+4+10+20 кликера.

Задаци који се оцењују са 4 бода

9. Ако 9 једнаких свезака коштају мање од 1000 динара, а 10 таквих свезака коштају више од 1100 динара, при чему је цена изражена целим бројем динара, колика је онда цена једне свеске?

(A) 100 (B) 110 (C) 111 (D) 112 (E) 120

Решење: (C) 111. Нека је x - цена једне свеске.

$$9x<1000 \Rightarrow x<111\frac{1}{9} \Rightarrow x\leq 111; \quad 10x>1100 \Rightarrow x>110.$$

Према томе, $x = 111$.

10. Одредити однос површина белих и црних делова ове правилне петокраке звезде.

(A) 1:3 (B) 1:2 (C) 1:1 (D) 2:1 (E) 3:1

Решење: (C) 1:1

Кад на погодан начин извршимо разрезивање дела звезде обојеног црном бојом и уочимо подударне делове, (међу црним и белим деловима), уверићемо се да је црном бојом обојена иста површина као и белом.

11. Једна страница троугла је аритметичка средина других двеју страница. Ако је h висина која одговара средњој страници, онда је полупречник уписане кружнице у тај троугао једнак:

(A) $\frac{h}{4}$ (B) $\frac{h}{3}$ (C) $\frac{h}{2}$ (D) $\frac{2}{3}h$ (E) $\frac{3}{4}h$

Решење: (B) $\frac{h}{3}$.

Образложење: Странице: a, b и c, при чему је $b=\frac{a+c}{2}$, тј. $a+c=2b$; обим је $a+b+c=(a+c)+b=3b$, а површина

$P=r\cdot s=\frac{1}{2}bh$, s-полуобим. Тада је $r=\frac{P}{s}=\frac{\frac{1}{2}h}{s}=\frac{b}{2s}=\frac{bh}{3b}=\frac{h}{3}$.

12. Кружницу представља само једна од следећих једначина:

(A) $x^2 + y^2 = 0$

(B) $x^2 - y^2 = 1$

(C) $x^2 + 4y^2 = 100$

(D) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$

(E) $x^2 - 2x + y - 8 = 0$

Решење: (D) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$

$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 5 = 0 \Rightarrow$

$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5 -$ кружница с центром $S(-2,1)$ и $r = \sqrt{5}$ cm.

13. Дати су површина квадра (правоуглог паралелепипеда) P=64 cm^2 и збир трију његових ивица $a+b+c$=10 cm. Колика је дијагонала тог квадра?

(A) 5 cm (B) 6 cm (C) 8 cm (D) 10 cm (E) 12 cm

Решење: (B) 6 cm

$a + b + c = 10 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 100$, $D^2 + P = 100$, тј.

$D^2 + 64 = 100 \Rightarrow D^2 = 36 \Rightarrow D = 6.$

13. Решење једначине $(x-5)^0 \sqrt{x^2} = |x|$ не може бити број :

(A) -5 (B) 0 (C) 1 (D) 3 (E) 5

Решење: (E) 5, јер 0^0 није одређен израз; иначе, сваки други реалан број је решење дате једначине.

14. Следеће једначине одређују пет правих:

$x - 2y = 0, \quad x + y = 3, \quad x - 2y + 2 = 0, \quad x = 1 + 2y, \quad -2x + 4y + 8 = 0.$

На колико делова деле координатну раван све те праве?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

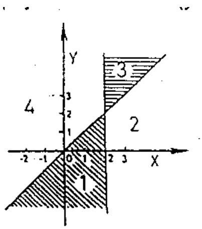
Решење: E) 10

Образложење: Ако дате једначине сведемо на експлицитни облик, имаћемо редом: $y = \frac{1}{2}x, \quad y = -x + 3, \quad y = \frac{1}{2}x + 1, \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2},$

$y = \frac{1}{2}x - 4.$ Видимо да су, осим праве $y = -x + 3$, остале четири међусобно паралене, јер имају исти коефицијент правца $k = \frac{1}{2}$.

Четири паралелне праве у истој равни деле ту раван на 5 делова, а ако се пресеку једном правом број делова се удвостручи, те износи 10.

15. Којој од бројевима означених области припадају тачке чије координате (x,y) задовољавају услове: $x - y > 0$ и $x>2$?

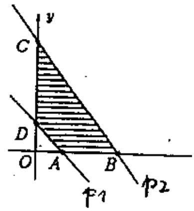


(A) области 1
(B) области 2
(C) области 3
(D) областти 4
(E) тачка P (2, 2)

Решење: (B) области 2

Образложење: Пошто је $y<x$ и $x>2$, ради се свим тачкамам које су испод праве $y=x$ и десно од праве $x=2$. Може се проверити и "методом контролне тачке" (у свакој области узме се нека тачка и провери да ли њене координате задовољавају дате услове).

16. Пресечне тачке правих $x+y=1$ (p_1) и $4x+3y=12$ (p_2) са координатним осама Ox и Oy су A, B, C, D ($A,B\in Ox$, $C,D\in Oy$). Површина четвороугла $ABCD$ једнака је:

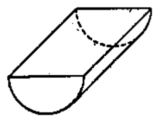


(A) 12 (b) 6 (C) 5,5 (D) 4,5 (E) 3,5

Решење: (C) 5,5

$$P_{ABCD} = P_{\Delta OBC} - P_{\Delta OAD} = \frac{3\cdot 4}{2} - \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{12}{2} - \frac{1}{2} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2} = 5{,}5$$

17. Дрвени ваљак дужине 7 dm и пречника 4 dm преполовљен је тако што је преструган кроз осу ваљка. Израчунати запремину једне од тако добијених половина ваљка.

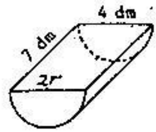


Узмите да је $\pi \approx \dfrac{22}{7}$.

(A) 88 (B) 80 (C) 44 (D) 40 (E) 22

Решење: (C) 44 .

$2r = 4\,dm \Rightarrow r = 2\,dm,\ H = 7\,dm$



$$V = \frac{1}{2} r^2 \pi H, \quad V = \frac{1}{2}\cdot 2^2 \pi \cdot 7 = \frac{1}{2}\cdot 4\pi \cdot 7 = 14\pi,$$

$$V \approx 14\cdot \frac{22}{7} = 44\ (\mathrm{dm}^3)$$

Задаци који се оцењују са 5 бодова

18. Решење једначине $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 \cdot \ldots \cdot 3^n = 3^{78}$ је број:

(A) 6 (B) 8 (C) 0 (D) 12 (E) 13

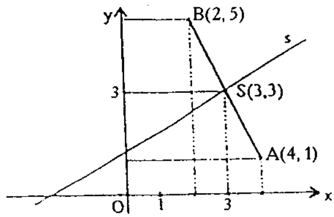
Решење: (D) 12

$$3^{1+2+3+4+\ldots+n} = 3^{78} \Rightarrow 1+2++4+\ldots+n = 78, \quad \frac{1}{2}n(n+1) = 78 \Rightarrow$$

$$n(n+1) = 2 \cdot 78 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 = 12 \cdot 13 \Rightarrow n = 12$$

19. Дате су тачке A(4, 1) и B(2, 5). Једначина симетрале дужи AB гласи:

(A) $x-2y+3=0$ (B) $x-2y+5=0$ (C) $2x-y+3=0$
(D) $2x-y+5=0$ (E) $x-y+1=0$



Решење: (A) $x-2y+3=0$

Коефицијенат правца праве AB је

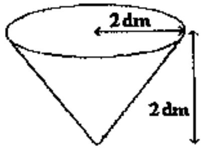
$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1} = \frac{5-1}{2-4} = -2,$$

па је коефицијент правца симетрале $s_s = \frac{1}{2}$;

$$x_S = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{4+2}{2} = 3, \quad y_S = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{1+5}{2} = 3;$$

тражена једначина: $y-3 = \frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow x-2y+3=0.$

20. Суд облика купе висине 2 dm и полупречника 2 dm напуњен је водом. Вода треба да се преспе у други суд облика коцке чија је ивица 2 dm. До које висине ће стићи вода у коцки?



(A) $\frac{2}{3}$dm (B) $\frac{3}{2}$dm (C) $\frac{\pi}{2}$dm (D) $\frac{\pi}{3}$dm (E) прелиће се

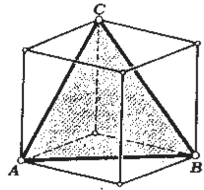
Решење: (E) прелиће се.

$\frac{1}{3}R^2\pi H = a^2 h$, тј. $\frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2\pi = 2^2 h \Rightarrow h = \frac{2}{3}\pi > 2.$

Значи, вода ће се прелити.

21. Површина троугла ABC, којег видите на слици, је $2\sqrt{3}\,\text{dm}^2$. Колика је површина коцке?

(A) $32\ \text{dm}^2$ (B) $24\sqrt{3}\ \text{dm}^2$ (C) $24\sqrt{2}\ \text{dm}^2$
(D) $20\sqrt{2}\ \text{dm}^2$ (E) $24\ \text{dm}^2$



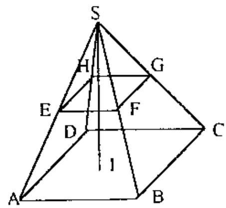
Решење: (E) $24\ \text{dm}^2$

Троугао ABC је једнакостраничан. Његова страница је $a\sqrt{2}$. Из податка да површина троугла ABC износи $2\sqrt{3}$ можемо израчунати ивицу коцке: $2\sqrt{3} = \dfrac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = 2$,

па је површина коцке $P = 24\,\text{dm}^2$.

22. Пирамида $SABCD$ којој је основа квадрат странице 4 cm, а висина јој је 5 cm, пресечена је са равни која је паралелна основи пирамиде и пролази кроз средиште њене висине. Тако је добијена нова пирамида $SEFGH$. Запремин те мале пирамиде је:

(A) половина запремине велике пирамиде
(B) четвртина запремине велике пирамиде
(C) шестина запремине велике пирамиде
(D) осмина запремине велике пирамиде
(E) неки други однос.



Решење : D) осмина запремине велике пирамиде

$$\frac{V_{SEFGH}}{V_{SABCD}} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{2}}{\frac{1}{3}\cdot 4^2 \cdot 5} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{SEFGH} = \frac{1}{8}V_{SABCD}.$$

23. Посматрај низ:

1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 3121213, 212223, 114213, _______

Следећи члан тог низа је:

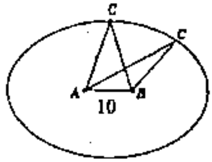
(A) 21121314 (B) 12131431 (C) 3121314
(D) 31121314 (E) немогуће је одредити

Решење: (D) 31121314. Сваки следећи број описује претходни: у броју је била једна јединица - пишемо 11; две јединице - пишемо 21; једна јединица, једна двојка-1112; три јединице, једна двојка-31112, итд.

24. Ако је једна страница троугла AB=10 cm и његов обим 36 cm, онда је највећа могућа површина тог троугла (у cm^2):

(A) 20 (B) 30 (C) 60 (D) 65 (E) $25\sqrt{3}$

Решење: (C) 60. *Образложење.* Пошто је обим 36 cm, значи да је $CA+CB$=26 cm и, према томе, теме C мора лежати на елипси чије су жиже A и B. То значи да ће висина на AB бити максимална када је ΔABC једнакокраки и $CA+CB$=26 cm, тј. $CA=CB$=13cm. Висина која одговара основици је тада 12 cm (по Питагориној теореми је $13^2-5^2=144$), а тражена максимална површина је $P=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12=60\ \text{cm}^2$.



Напомена: Може се решити и на друге начине (без елипсе). На пример, пошто је полуобим троугла $s=18$ и $a+b=26$, коришћењем Хероновог обрасца за P троугла $P=\sqrt{s(s-a)(s-b(s-c)}$, имаћемо $P=\sqrt{18\cdot(18-a)\cdot(18-b)\cdot 8}=12\sqrt{(18-a)(a-8)}=12\sqrt{25-(a-13)^2}$, па је $\max P=12\cdot 5=60$ (cm^2) за a=13 (cm)=b. Може и тригонометријски и др.

25. Наставник је за домаћи рад задао тежак задатак, па се показало да је у одељењу број дечака који су решили задатак једнак броју девојчица који задатак нису решиле. Која од следећих тврдњи је тачна?

(A) Ученика који су задатак решили има више него девојчица
(B) Ученика који су задатак решили има мање него девојчица
(C) Ученика који су задатак решили има исто колико и девојчица
(D) Међу ученицима који су задатак решили има више дечака него девојчица
(E) Дечака који задатак нису решили има више него девојчица.

Решење: (C). *Образложење.* Одељење ћемо поделити на 4 скупа: дечаци који су задатак решили, дечаци који задатак нису решили; девојчице које су задатак решиле и девојчице које задатак нису решиле. Ако скуп дечака који су решили задатак заменимо скупом девојчица које задатак нису решиле (по услову задатка та два скупа су иста), добићемо да је број ученика који су задатак решили једнак броју девојчица у одељењу.