Zadaci i rešenja

Klub mladih matematičara "Arhimedes"- Beograd

"M I S L I Š A"

Matematičko takmičenje za
učenike SŠ
po ugledu na
Međunarodno takmičenje "KENGUR"

2008 4. razred

Zadaci koji se ocenjuju sa 3 boda

1. Petina ipo od sto koliko je to?

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50

Rešenje: (C) 30

$$\left(1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\right)\cdot 100=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}\right)\cdot 100=\frac{3}{10}\cdot 100=30$$

2. Ako se broj 110 umanji za 10% dobiće se broj:

(A) 90 (B) 99 (C) 100 (D) 101 (E) 11

Rešenje: (B) 99

Traženi broj je $110-110\cdot 0{,}1=110-11=99$

3. Ako je $\frac{1}{x}+\frac{7}{3x}=\frac{5}{6}$, tada je x jednako:

A) 2 (B) 5 (C) 6 (D) 4 (E) 3

Rešenje: (D) 4. Pošto je $\frac{1}{x}+\frac{7}{3x}=\frac{10}{3x}$, jednačina se svodi na

$$\frac{10}{3x}=\frac{5}{6}\Rightarrow\frac{3x}{10}=\frac{6}{5}\Rightarrow x=4.$$

4. Ako bi učenik kupio 7 olovaka, preostalo bi mu 4 dinara od svote koju je imao; a ako bi hteo da kupi 10 olovaka, nedostajalo bi mu 20 dinara. Koliko dinara je imao?

(A) 60 (B) 56 (C) 50 (D) 40 (E) 66

Rešenje: (A) 60 . *Obrazloženje. Prvi način.* Ako kupi 3 olovke više (jer 10-7=3), onda plati 24 dinara više (jer

4+20=24), što znači da je cena jedne olovke 8 dinara (jer 24:3=8). Učenik je imao 60 dinara (7·8+4=60, odnosno 10·8–20=60).

Drugi način. Neka je x cena olovke, a s suma kojku je učenik imao. Tada: $s=7x+4$ i $s=10x-20,$ pa je $10x-20=7x+4,$ odakle je $x=8$ (cena olovke) i $s=60$ (suma koju je imao).

5. Ako je $x+y=4,\ y+z=7,\ x+z=5,$ onda je $(x+y+z)^2$ jednako:

(A) 36 (B) 64 (C) 100 (D) 144 (E) 256

Rešenje: (B)64

Sabiranjem levih i desnih strana jednačina dobijamo

$2x+2y+2z=16 \Rightarrow x+y+z=8 \Rightarrow (x+y+z)^2=64$

6. Celih brojeva koji pripadaju skupu rešenja nejednačine $x^2<x$ ima:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) bezbroj (E) nijedan od tih slučajeva

Rešenje: (A) 0, jer $x^2<x \Rightarrow x^2-x<0 \Rightarrow x(x-1)<0 \Rightarrow 0<x<1$, tj. $x\in(0,1)$, a u tom intervalu nema nijednog celog broja.

7. Date su formule: 1) $a^2-b^2<b^2$, 2) $a^2+b^2\ge 2ab,$

3) $a^2+b^2\ge a^2-b^2$, 4) $a^2-b^2\le a^2$, 5) $(a+b)^2\ge a^2+b^2$

Koliko je među ovim formulama onih koje su tačne za svako $a,b\in R$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Rešenje: (D) 3. Tačne su formule 2, 3, 4.

Obrazloženje. Date formule se svode redom na: 1) $a^2<2b^2$ (nije tačno, npr. za $a=b=0,$ ili za a=2 i b=0,01); 2) $(a-b)^2\ge 0$ (tačno za svako a i b); 3) $2b^2\ge 0$ (uvek tačno); 4) $-b^2\le 0$ (uvek tačno);

5) $2ab\ge 0$ (nije tačno kad su a i b različitog znaka).

1

8. U ovoj tabeli umesto x treba da stoji broj: 1 1

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8 1 2 1

Rešenje: (C) 6 1 3 3 1

Ovo je deo Paskalovog trougla gde je ma 1 4 $\boldsymbol{x}$

4 1

koji broj jednak zbiru dva broja iznad njega. 1 5 10 10 5 1

Zadaci koji se ocenjuju sa 4 boda

9. Zbir $1+i+i^2+i^3+...+i^{2008}$, gde je i imaginarna jedinica, jednak je:

A) 1 (B) $1+i$ (C) i (D) 0 (E) $1-i$

Rešenje: (A) 1 . Traži se zbir geometrijske progresije čiji je prvi član 1, količnik i, a poslednji član i^{2008}, pa je

$$S=\frac{i^{2009}-1}{i-1}=\frac{i^{2008}\cdot i-1}{i-1}=\frac{1\cdot i-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1.$$

Napomena: Može i bez progresije. Zbir do poslednjeg sabirka (i^{2008}) jednak je 0, jer je nuli jednak zbir svakog od po četiri sabirka redom ($1+i-1-i$).

10. U koliko najviše tačaka se mogu seći dve kružnice i tri različite prave (a to je slučaj kada svaka linija seče sve ostale)?

(A) 10 (B) 11 (C) 14 (D) 17 (E) 20

Rešenje: (D) 17. *Prvi način.* Kružnice se seku u 2 tačke; prva prava seče dve kružnjice najviše u 4 tačke; druga prava seče dve kružnice u 4 tačke i prvu pravu u 1 tački; treća prava seče dve kružnice takođe u 4 tačke, prvu pravu u 1 tački i drugu pravu u 1 tački. Svega presečnih tačaka ima: 2+4+4+1+4+1+1=17.

Drugi način. Prava seče kružnicu u dve tačke, pa takvih preseka ima 2·3·2=12. Preseka pravih sa pravima ima 3, a preseka kružnice sa kružnicom ima 2. Ukupno ima: 12+3+2=17 presečnih tačaka.

11. Zbir rešenja jednačine $\sqrt{x^2-4x+4}=2x-1$ jednak je:

(A) –2 (B) –1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

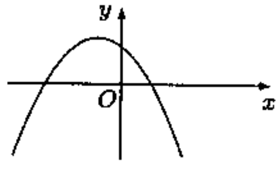
Rešenje: (D) 1

Jednačina se svodi na $\sqrt{(x-2)^2}=2x-1$, tj. $|x-2|=2x-1$.

Za $x \geq 2$ postaje $x-2=2x-1 \Rightarrow x=-1$, ali ova vrednost x ne zadovoljava uslov $x \geq 2$. Za $x<2$ imamo $-(x-2)=2x-1 \Rightarrow x=1$ i to je jedino rešenje date jednačine.

12. Na slici je prikazana parabola $y=ax^2+bx+c$. Koje od sledećih tvrđenja je tačno?

(A) $a>0, b>0, c>0$ (B) $a<0, b<0, c>0$
(C) $a<0, b>0, c>0$ (D) $a>0, b<0, c>0$
(E) $a<0, b<0, c<0$.



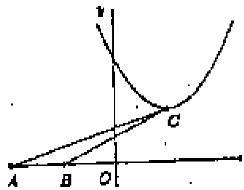
Rešenje: (B) $a<0, b<0, c>0$
Za grafik na slici važi: $a<0$ (okrenut je na dole); $-\frac{b}{a}<0$ (zbir nula funkcije) i zbog $a<0$, mora biti $b<0$; $\frac{c}{a}<0$ (proizvod nula funkcije) i zbog $a<0$ mora biti $c>0$; znači, sledi zaključak (B).

13. Data je parabola $y=x^2-2x+2$ i tačke $A(-2, 0)$ i $B(-1, 0)$. Tačka C pripada paraboli. Najmanja površina koju može imati trougao ABC je:

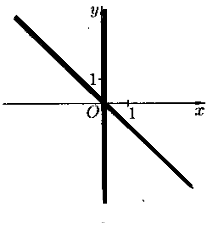
(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{4}$

Rešenje: (D) $\frac{1}{2}$. *Obrazloženje.* Skicirajmo datu parabolu: $y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$. Ako duž AB uzmemo za osnovicu trougla, onda će trougao imati najmanju površinu ako je visina koja odgovara osnovici minimalna. Najmanju visinu ovaj trougao će imati ako mu treće teme bude u temenu parabole, tj. tačka $S(1, 1)$. Tražena najmanja vrednost je

$$\min P_{\Delta}=\frac{1}{2}AB \cdot h_C=\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1=\frac{1}{2}.$$



14. Grafiku na slici (podebljane prave) pripada jednačina:



(A) $x=0$
(B) $x+y=0$
(C) $x-y=0$
(D) $x^2-xy=0$
(E) $x^2+xy=0$.

Rešenje: (E) $x^2 + xy = 0.$

Uputstvo: Skiciraj grafike navedenih funkcija.

Za jednačinu pod (E) imamo:

$x^2 + xy = 0 \Rightarrow x(x + y) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = -x$, što odgovara grafiku na slici (x=0 - ordinatna osa, $y = -x$ - simetrala II i IV kvadranta, a na slici je njihova unija).

15. Date su funkcije:

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{x^2}{x},\ f_3(x) = \sqrt{x^2},\ f_4(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2.$$

Koje tvrđenje je tačno:

(A) Među datim funkcijama nema međusobno jednakih

(B) Sve date funkcije su međusobno jednake

(C) $f_1 = f_2 \neq f_3$ (D) $f_1 = f_3 \neq f_4$ (E) $f_1 \neq f_3 = f_4$?

Rešenje: (A) nema međusobno jednakih funkcija

Obrazloženje. Da bi dve funkcije $f(x)$ i $g(x)$ bile jednake potrebno je i dovoljno da obe imaju istu oblast definisanosti i da važi jednakost $f(x) = g(x)$ za svako x. Funkcije $f_1(x)$ i $f_3(x)$ definisane su za svako $x \in R$, funkcija $f_2(x)$ za $x \neq 0$, funkcija $f_4(x)$ za $x \geq 0$; dakle, iste oblasti definisanosti imaju samo f_1 i f_2, te ostaje da se vidi da li su to jednake funkcije. Kako je $f_3(x)$=x i $f_3(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ za svako x, ali jednakost $|x| = x$ ne važi za svako realno x, već samo za $x \geq 0$, te f_1 i f_3 nisu jednake funkcije. Dakle, među datim funkcijama nema jednakih.

16. Utvrditi koliko ima istinitih među tvrđenjima:

a) Funkcija $y = 2^x$ definisana je za svaki realan broj x

b) Funkcija $y = \log|x|$ nema nula

v) Funkcija $y = tg\,x$ je rastuća na čitavoj oblasti definisanosti

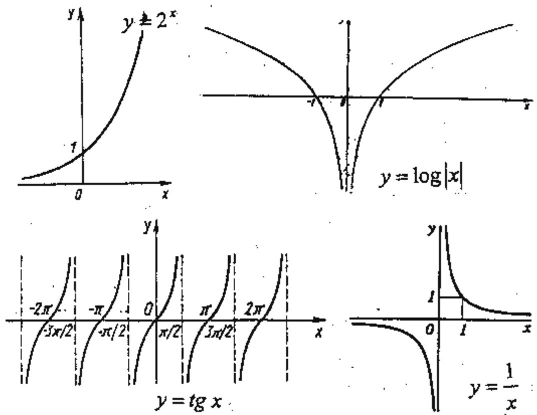
g) Funkcija $y = \dfrac{1}{x}$ nema ekstremnih vrednosti

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Rešenje: (D) 3. Tačna su tvrđenja: a), v), g).

Uputstvo: Skicirati odgovarajuće grafike.

F-ja pod b) ima dve nule: -1 i 1.

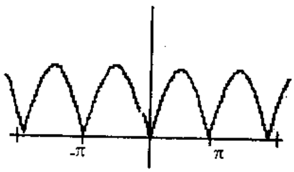


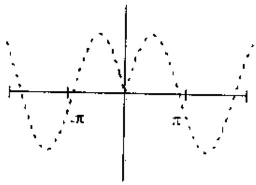
17. Najduži interval na kome su funkcije $f(x)=|\sin x|$ i $g(x)=\sin|x|$ identički jednake je:

(A) $[-\pi,\pi]$ (B) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ (C) $[0,\pi]$ (D) $[0,2\pi]$

(E) ne postoji takav interval

Rešenje: (A) $[-\pi,\pi]$. Crtež govori! Sa crteža je jasno da je $[-\pi,\pi]$ najduži interval na kome se grafici funkcija poklapaju, tj. gde su funkcije identične.





$f(x)=|\sin x|$

$g(x)=\sin|x|$

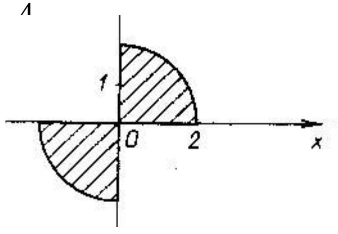
Zadaci koji se ocenjuju sa 5 bodova

18. Površina koju određuju grafici zadati formulama $x^2+y^2\le 4$ i $xy\ge 0$ jednaka je:

(A) 1 (B) 2 (C) π (D) 2π (E) $\frac{1}{4}$

Rešenje: (D) 2π

Prva formula - krug, druga - prvi i treći kvadrant. NJihov presek je figu na slici, pa je jasno da datim formul



odgovara ta figura, tj. delovi kruga poluprečnika 2, koji su u I i III kvadrantu.

19. Neka je r realan broj (pozitivan, negativan ili nula). Koji od sledećih izraza je uvek veći od r?

(A) r^2+1 (B) $2r$ (C) $\sqrt{|r|}+\frac{1}{2}r$ (D) $(r+1)^3$ (E) r^{100}

Rešenje: (A) r^2+1

Obrazloženje. Dovoljno je uzeti (kontra) primere. Npr. $r=16$ eliminiše (S), $r=-3$ eliminiše (B) i (D), $r=-\frac{1}{2}$ eliminiše (E). Ostaje samo slučaj (A). Ako je $|r|\geq 1$, tj. $r\geq 1$ ili $r\leq -1$, onda $r^2\geq 1\Rightarrow r^2+1>r$; ako je $|r|<1$, tj. $-1<r<1$, onda $r^2<1\Rightarrow r^2+1>1>r$.

20. Oblast definisanosti funkcije $y=\sqrt{\frac{x}{x^2-9}}$ sadrži skup:

(A) $(-1,3]$ (B) $(-1,1)$ (C) $[\pi,+\infty)$ (D) $(0,3)$ (E) $(-4,0]$

Rešenje: C) $[\pi,+\infty)$. Data funkcija definisana je za

$$\frac{x}{x^2-9}>0\Rightarrow(x\geq 0\wedge x^2-9>0)\vee(x\leq 0\wedge x^2-9<0)\Leftrightarrow$$
$$(x\geq 0\wedge -\infty<x<-3\vee 3<x<+\infty)\vee(x<0\wedge -3<x<3)$$
$$\Leftrightarrow 3<x<+\infty\vee -3<x<0,\text{ tj. } x\in(-3,0]\cup(3,+\infty).$$

21. O brojevima a, b, c znamo sledeće: jedan je pozitivan, jedan negativan i jedan jednak nuli, a osim toga je $|a|=b^2(b-c)$. Utvrditi koji broj je pozitivan, koji negativan, a koji je jednak nuli.

(A) $a<0,\ b>0,\ c=0$ (B) $a<0,\ b=0,\ c>0$ (C) $a>0,\ b<0,\ c=0$
(D) $a>0,\ b=0, c<0$ (E) $a=0,\ b>0,\ c<0$

Rešenje: (A) $a<0,\ b>0,\ c=0$. Jedno od mogućih *obrazloženja*:

1) $b=0\Rightarrow a=0-$ protivno uslovu, jer dva broja ne mogu biti 0.

2) $a=0\Rightarrow b=a=0\vee b=c-$ i jedno i drugo protivureči uslovu.

3) $c=0\Rightarrow|a|=b^3$, ali zbog $|a|>0$, mora biti $b>0$.

Prema tome: $a<0,\ b>0,\ c=0$.

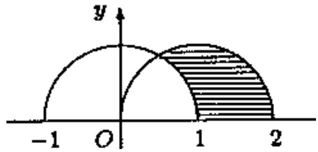
22. Koliki je zbir svih brojeva oblika $a \cdot b$, gde su a i b celi brojevi od 1 do 10 (tj. koliki je zbir svih brojeva u tablici množenja od 1 do 10)?

(A) 2500 (B) 3025 (C) 5000 (D) 10100 (E) drugi odgovor

Rešenje: (B) 3025

$(1\cdot1+1\cdot2+...+1\cdot10) + (2\cdot1+2\cdot2+ ...+ 2\cdot10) + ... +(10\cdot1+10\cdot2+ ... + 10\cdot10) = (1+2+ ... + 10)\cdot(1+2+...+10)=(1+2+ ... +10)^2=55^2=3025.$

23. Veličina šrafirane figure na slici jednaka je:



(A) 1 (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

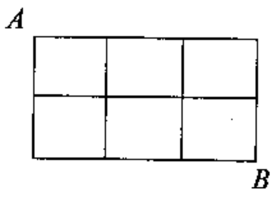
(D) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (E) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

Rešenje: (E) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

Obrazloženje: Površina zajedničkog dela polukrugova dobija se
kad se na površinu isečka koji je šestina kruga poluprečnika 1
doda površina odsečka nad tetivom dužine 1 tog kruga (stranica jednakostraničnog trougla):

$P_s=\frac{\pi}{6}+(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$. Traženu površinu dobijamo kada od površine polukruga oduzmemo nađenu površinu P_s. Dakle: $P=\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

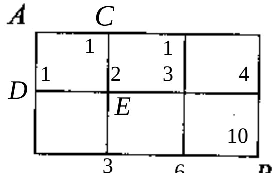
24. Na slici je deo plana ulica jednog grada.
Koliko ima najkraćih puteva da se stigne iz
tačke *A* u tačku *B*?



(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 10 (E) 12

Rešenje: (D) 10

Pošto se traže najkraći putevi, dopuštena su samo dva smera kretanja: sleva udesno i odozgo



nadole. Raskrsnice ulica oznaene su tačkama, a svakoj tački je pridružen broj koji označava koliko ima puteva iz A do te tačke. Na primer, u tačku S možemo doći samo jednim putem; u tačku E - na dva načina (iz S ili iz D).

Vidi se da postoji 10 najkraćih puteva da se iz A dođe u B.

Može i ovako: Svaki put iz A u B sastoji se od 5 odsečaka: 3 ho-rizontalna i 2 vertikalna. Različiti putevi razlikuju se samo u redosledu ređanja horizontalnih i vertikalnih odsečaka. Zato je ukupan broj puteva jednak broju načina da se od 5 odsečaka izaberu 3 horizontalna (ili 2 vertikalna) odsečka, a taj broj je $\binom{5}{3}=\binom{5}{2}=10.$

25. Lanac sa dve karike dugačak je 12 cm. Lanac sa 5 takvih karika dugačak je 27 cm. Dužina lanca od 40 karika (pri čemu je u svim slučajevima lanac zategnut) jednaka je (u cm):

(A) 187 (B) 198 (C) 202 (D) 240 (E) 280

Rešenje: (C) 202

Obrazloženje. Neka je a spoljnji prečnik karike i d debljina karike. Dužina lanca od 2 karike L_2 jednaka je (u cm) $L_2 = 2a - 2d = 12$, a od 5 karika: $L_5 = 5a - 8d = 27.$ Iz sistema od te dve jednačine dobijamo a=7 i d=1. Lanac od n karika ima dužinu: $L_n = na - 2(n-1)d.$ Za n=40 imaćemo: $L_{40} = 40 \cdot 7 - 2 \cdot 39 \cdot 1 = 202$ (cm).