Клуб младих математичара "Архимедес" Београд

Дописна математичка олимпијада 2006

I коло **1. октобар 2006.**

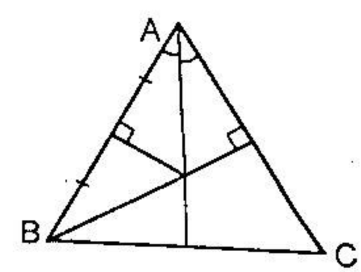
VII разред

1. Распоредите по кружници бројеве 14, 27, 36, 57, 178, 467, 590, 2345 тако да свака два суседна броја имају заједничку цифру.

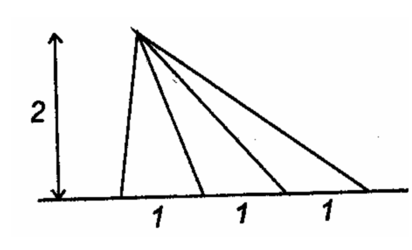
2. На сваком од 11 картончића написан је по један број, не већи од 5. Миша је све картончиће поређао један до другог и прочитао једанаестоцифрени број који је тако настао. Затим је картончиће промешао, поново сложио и добио нови једанаестоцифрени број. Докажите да збир тако добијених бројева садржи бар једну парну цифру у свом десетичном (декадном) запису.

3. На једном математичком такмичењу требало је да ученици реше неколико простих и неколико сложених задатака. За сваки тачно решен сложен задатак добијали су 3 бода, за сваки тачно решен прост задатак добијали су 2 бода, а за сваки нерешен прост задатак губили су 1 бод. Јован је решио 10 задатака и освојио укупно 14 бодова. Колико је било простих задатака на том такмичењу?

4. У троуглу ABC симетрала угла A, висина из темена B и нормала у средишту странице AB секу се у једној тачки. Одредити величину угла A у том троуглу.



5. Колики је збир површина свих троуглова који се могу уочити на слици десно?



Решења треба образложити!

КММ "Архимедес"

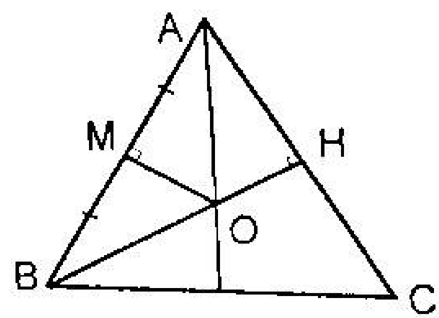
Решења:

1. 14, 178, 27, 57, 590, 2345, 36, 467.

2. Ако би се при сабирању појавио пренос, то би значило да смо сабирали петице. Тада ће се у збиру појавити сигурно цифра 0. Ако, пак, преноса нема, у збиру ће се појавити непарне цифре увек када су у питању сабирци различите парности. Али тада ће картица са непарним цифрама бити исто онолико колико и картица са парним цифрама. Како картица има укупно 11, не може се десити да парних има колико и непарних, па ће се у случају да нема преноса (код петица) сигурно појавити парна цифра кад сабирамо два броја исте парности (једанаести сабирак!)

3. Да су на том такмичењу сви задаци које је Јован решавао били сложени, он би освојио 10·3=30 бодова. Али, за сваки прост задатак, независно од тога да ли га је Јован решио или не, њему се укупни збир бодова умањује за 1, односно он добија 1 бод мање него што би добио да је решавао само сложене задатке. Како је 14=30–16, значи да је било 16 простих задатака.

4. Обележимо са H подножје висине из темена B, са M средиште странице AB, са O тачку пресека висине, симетрале и нормале (у средишту странице AB). Тада су троуглови OBM и OMA подударни (као правоугли троуглови са једнаким катетама), а троуглови OMA и OAH су такође подударни, али као правоугли троуглови са заједничком хипотенузом и једнаким угловима. Одавде следи да је:



$$\angle OAH = \angle OAM = \angle OBM,$$

а ова три угла, заједно са правим углом AHB, представљају збир углова троугла AHB. Даље се лако израчунава да је тражени угао $\angle A = 60^{\circ}$.

5. Основно је питање колико на датој слици има троуглова. Кад то одредимо, задатак ћемо даље једноставно решити, јер су све то троуглови који имају исту висину. На овој слици можемо уочити 3+2+1= 6 троуглова (3 мала, 2 средња, 1 велики). Збир свих њихових површина биће:

$$3\cdot\frac{1\cdot 2}{2}+2\cdot\frac{2\cdot 2}{2}+1\cdot\frac{3\cdot 2}{2}=3+4+3=10$$