Задаци и решења

Клуб младих математичара "Архимедес"- Београд

" М И С Л И Ш А"

Математичко такмичење за ученике СШ
по угледу на
Међународно такмичење "КЕНГУР"

2008 — 1. разред

Задаци који се оцењују са 3 бода

1. Ако двоцифрени број има цифру десетица x и цифру јединица y, онда се он у декадном бројевном систему записује:

(A) $10xy$ (B) xy (C) $x+y$ (D) $10x+y$ (E) $10y+x$

Решење: (D) $10x+y$

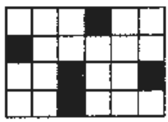
2. Колико има петоцифрених бројева чији је збир цифара 2?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Решење: (E) 5.

То су бројеви: 20000, 11000, 10100, 10010, 10001

3. Колико белих поља на овој слици треба обојити црном бојом па да број црних поља буде једнак половини броја белих поља?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
(E) такво бојење је немогуће

Решење: (B) 3

Велики правоугаоник састоји се из $6\cdot4=24$ поља. Тражи се однос црних и белих поља буде 1:2, тј. да црних поља буде 8, а белих 16. Како на слици већ видимо 5 црних поља, значи да треба обојити још 3 поља да би био испуњен тражени услов.

4. Деветина ипо неког броја је 15. Који је то број?

(A) 45 (B) 60 (C) 65 (D) 80 (E) 90

Решење: (E) 90

$$1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}x=15\Rightarrow\frac{1}{6}\cdot x=15\Rightarrow x=90$$

5. Појефтињење најпре за 10%, а затим за 20% једнако је једнократном појефтињењу за:

(A) 32% (B) 28% (C) 30% (D) 25% (E) 19%

Решење: (B) 28%

Ако роба, чија је цена a, појефтини за 10%, нова цена је $0{,}9a$. Ако затим појефтини за 20%, нова цена биће $0{,}8\cdot0{,}9a=0{,}72a$, што је еквивалентно једнократном појефтињењу за 28%.

6. Нека је a цео број. Која тврдња је тачна за свако $a\in Z$?

(A) a је позитиван број (B) $a+2$ је паран број (C) $3a>a$

(D) $a(a+1)$ је дељив са 2 (E) $2a+1<2a$

Решење: (D) $a(a+1)$ је дељив са 2

Образложење:

(A) a је позитиван број – **није тачно** јер може бити нпр. $a=-5$

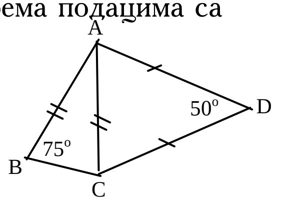
(B) $a+2$ је паран број – **није тачно** за a непарно

(C) $3a>a$ – **није тачно** за $a\leq0$

(D) $a(a+1)$ је дељив са 2 - **тачно,** јер су a и $a+1$ узастопни бројеви

(E) $2a+1<2a$ – **није тачно** јер је $2a$ претходник броја $2a+1$

7. Троуглови *ABC* и *ADC* су једнакокраки. Према подацима са слике одредите угао *BAD*.

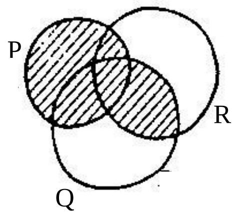


(A) 30° (B) 85° (C) 95° (D) 110° (E) 125°

Решење: (C) 95°

Троугао *ABC* је једнакокраки, а угао од 75° је његов угао на оновици. Зато његов угао при врху (код темена A) износи $180^{\circ}-2\cdot75^{\circ}=30^{\circ}$. Слично, у троуглу *ADC*, угао при врху је 50°, а његови углови на основици су по $(180^{\circ}-50^{\circ}):2=65^{\circ}$. Тражени угао *BAD* представља збир углова од 30° и 65°, тј. $\angle BAD=30^{\circ}+65^{\circ}=95^{\circ}$.

8. На слици су приказани скупови P, Q и R. Користећи знаке за унију и пресек изразити осенчени део (скуп) помоћу P, Q и R.



(A) $P\cup(Q\cap R)$ (B) $P\cup Q\cup R$ (C) $P\cap Q\cap R$

(D) $P\cap(Q\cup R)$ (E) $(P\cap Q)\cup(P\cap R)$

Решење: (A) $P\cup(Q\cap R)$

Задаци који се оцењују са 4 бода

9. Ако је $\frac{a+b}{b}=4$, колико је $\frac{b}{a+2b}$?

(A) 3 (B) 1 (C) 5 (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{5}$

Решење: (E) $\frac{1}{5}$

I начин: $\frac{a+b}{b}=4 \Rightarrow \frac{a+b}{b}+1=5 \Rightarrow \frac{a+2b}{b}=5 \Rightarrow \frac{b}{a+2b}=\frac{1}{5}$

II начин: $\frac{a+b}{b}=4 \Rightarrow a+b=4b \Rightarrow a=3b$, па заменом у тражени разломак добијамо: $\frac{b}{a+2b}=\frac{b}{3b+2b}=\frac{b}{5b}=\frac{1}{5}$

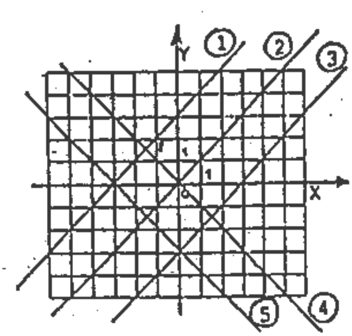
10. На крају школске године, за време летњег распуста, ученици једног одељења I разреда разменили су разгледнице: сваки је свакоме написао по једну разгледницу. Колико је било ученика у том одељењу, ако је било написано и послато 870 разгледница?

(A) 24 (B) 26 (C) 28 (D) 30 (E) 32

Решење: (D) 30

Нека је било n ученика. Сваки од њих написао је и послао по $n-1$ разгледницу. Према услову задатка је $n(n-1)=870$, одакле следи да је $n=30$. (Тражи се да производ два узастопна природна броја буде 870. Раставимо број 870 на просте чиниоце: $870=2\cdot3\cdot5\cdot29=30\cdot29$.)

11. Која од нацртаних правих представља график који одговара једначини $x+y+3=0$?



(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Решење: (E) 5, јер из дате једначине имамо $y=-x-3$, а то је права која не пролази кроз коорд. почетак. За $x = 0$ је $y = -3$, што једино испуњава график означен бројем 5.

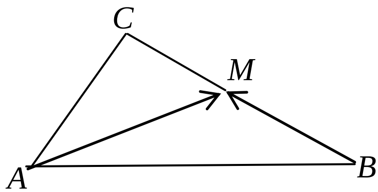
12. Коју најмању вредност (у степенима) може имати највећи угао у троуглу?

(A) 55^o (B) 60^o (C) 70^o (D) 75^o (E) 90^o

Решење: (B) 60^o.

Означимо са α, β, γ углове троугла и нека је 0 $\alpha\leq\beta\leq\gamma$. Доказаћемо да је најмања вредност $\gamma=60^o$. Покажимо најпре да је $\gamma\geq60^o$. Претпоставимо супротно, тј. да је $\gamma<60^o$. Тада је $\beta<60^o$ и $\alpha<60^o$, па би због тога било и $\alpha+\beta+\gamma<180^o$, што је немогуће. Значи, $\gamma\geq60^o$. Покажимо да може бити $\gamma=60^o$. Заиста, ако је $\alpha=\beta=\gamma=60^o$, онда су сви услови задатка испуњен. То је и решење задатка, тј. тако мора бити, јер ма која друга вредност γ, већа од 60^o, није најмања.

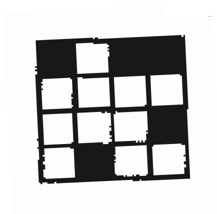
13. Тачка M је средиште странице BC троугла ABC. Којем од наведених вектора је једнак вектор $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}$?



(A) $\overrightarrow{AB}$ (B) $\overrightarrow{AC}$ (C) $\overrightarrow{BC}$ (D) $\overrightarrow{BA}$ (E) $\overrightarrow{CA}$

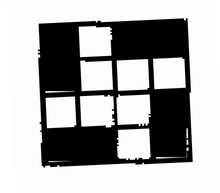
Решење: (B) $\overrightarrow{AC}$. Заиста, $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$, па је $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}$.

14. Колико још најмање квадратића треба обојити да би добијена фигура имала центар симетрије?



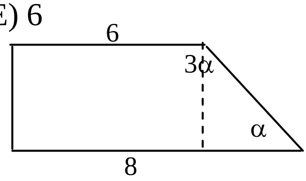
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Решење: (C) 3. Добијена фигура дата је на слици.



15. У правоуглом трапезу један од углова на дужем краку једнак је трећини другог угла на том краку. Дужине основица износе 8 cm и 6 cm. Колика је површина тог трапеза?

(A) 14 (B) 12 (C) 10 (D) 8 (E) 6



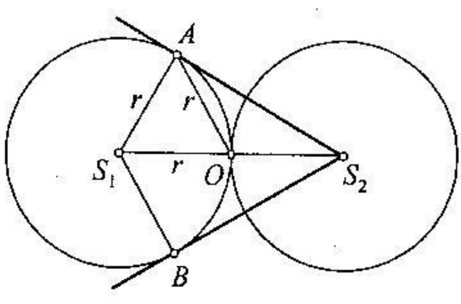
Решење: (A) 14.

Углови на краку трапеза су суплементни, па је према услову задатка, $\alpha + 3\alpha = 180^0$, тј. $\alpha = 45^0$. Зато можемо сматрати да троугао, којег видимо на слици, представља половину замишљеног квадрата странице 2 cm. Даље је лако одредити површину трапеза:
$6\cdot 2+(2\cdot 2):2=12+2=14$

16. Две кружнице једнаких полупречника додирују се споља. Из центра једне кружнице повучене су тангенте на другу кружницу. Колики угао граде те тангенте?

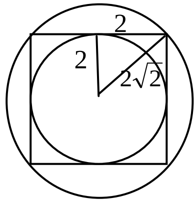
(A) 30^o (B) 36^o (C) 45^o (D) 50^o (E) 60^o

Решење: (E) 60^o.



Према ознакама са слике треба да одредимо $\angle AS_2B$. Због симетрије је $\angle AS_2B = 2\cdot\angle AS_2S_1$. Сада треба доказати да је троугао S_1OA једнакостраничан. То се може учинити напр. тако што уочимо да је троугао S_1S_2A правоугли, а AO је његова тежишна дуж. Даље, због $AO = OS_2$, закључујемо да је троугао AOS_2 једнакокраки. Угао код темена O у том троуглу је спољашњи угао троугла AOS_2, па је зато једнак збиру два унутрашња несуседна угла троугла AOS_2. То значи да је угао $OS_2A = 30^o$, а због напред поменуте симетрије (или због подударности троуглова S_1S_2A и S_1S_2B), закључујемо да је $\angle AS_2B = 60^o$.

17. Квадрату странице 4 cm описана је и уписана кружница. Колика је површина добијеног кружног прстена?



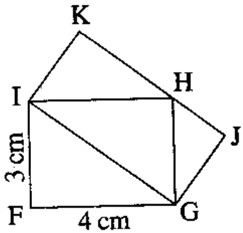
(A) π (B) 2π (C) 3π (D) 4π (E) 6π

Решење: (D) 4π .

$P = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi = (8-4)\pi = 4\pi$

Задаци који се оцењују са 5 бодова

18. На слици су FGHI и IGJK правоугаоници. Колика је површина правоугаоника IGJK?

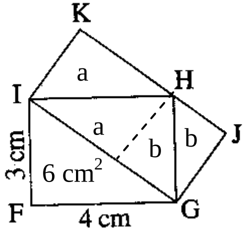


(A) 10 cm^2 (B) 12 cm^2 (C) 13 cm^2
(D) 14 cm^2 (E) 16 cm^2

Решење: (B) 12 cm^2

Слика говори.

IG-дијагонала правоугаоника



19. Одреди (без множења) који од ових бројева је највећи:

(A) 2007·2007 (B) 2006·2008 (C) 2005·2009
(D) 2004·2010 (E) 2003·2011

Решење: (A) 2007·2007

Нека је 2007=x. Тада су понуђени производи редом
$x \cdot x$, $(x-1)\cdot(x+1)$, $(x-2)\cdot(x+2)$, $(x-3)\cdot(x+3)$, $(x-4)\cdot(x+4)$, тј.
x^2, x^2-1, x^2-4, x^2-9, x^2-16, па се види да је највећи x^2, тј. одговор је (A).

20. Колико међу следећим тврђењима има истинитих?

(а) Унија два скупа увек садржи пресек та два скупа.
(б) Тежишна дуж је мања од сваке странице троугла.
(в) Око тупоуглог троугла не може се описати кружница.
(г) Спољашњи угао троугла једнак је збиру два унутрашња угла троугла.
(д) Раван је одређена са две праве.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Решење: (B) 1. Тачно је тврђење означено са (а).

Образложење:
(б) Тежишна дуж је мања од сваке странице троугла – није увек тачно (нпр. код тупоуглог троугла).
(в) Око тупоуглог троугла не може се описати кружница – није тачно. (Око сваког троугла може се описати кружница.).
(г) Спољашњи угао троугла једнак је збиру два унутрашња угла троугла – није тачно јер је битно да углови буду унутрашњи несуседни.
(д) Праве могу бити и мимоилазне, па онда не одређују раван.

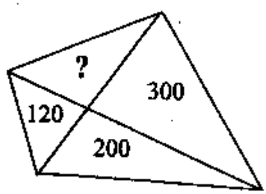
21. Колико има парних двоцифрених бројева којима је збир цифара паран?

(A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) 35 (E) 45

Решење: (A) 20

Да бисмо написали паран двоцифрен број, за место цифре јединица имамо 5 "кандидата", а то су 0, 2, 4, 6, 8, док за место цифре десетица имамо 9 "кандидата" (све цифре осим 0). То значи да парних двоцифрених бројева има $9\cdot5=45$. (Ова чињеница се може и једноставније доказати. Од укупно 90 двоцифрених бројева тачно половина (45) су парни, а половина непарни.)
Да би збир цифара таквог двоцифреног броја био паран, обе његове цифре треба да буду парне. На месту цифре јединица могу бити 0, 2, 4, 6, 8, а да би збир цифара био паран треба на месту цифре десетица такође да буде паран број, тј. 2, 4, 6, 8. Како се свака цифра коју напишемо на месту цифре десетица може комбиновати са сваком цифром коју пишемо на месту цифре јединица, значи да ће коначно бити $4\cdot5=20$ бројева који испуњавају постављене услове.

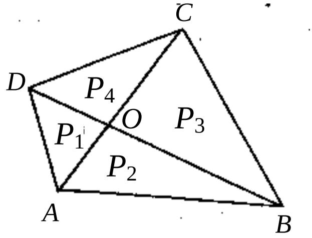
22. Четвороугаона торта разрезана је по дијагоналама на 4 дела (парчета). Три дела су измерили: масе су им биле 120, 200 и 300 грама, Четврти део су појели. Колико грама је мерио поједени део?



(A) 120 g (B) 180 g (C) 280 g (D) 330 g E) 500 g

Решење: (B) 180 g

Сматрамо да је маса парчета торте пропорционална горњој површини (јер је дебљина свуда иста), па масу поједеног дела лако налазимо из пропорције x:300=120:200 и добијамо x=180.

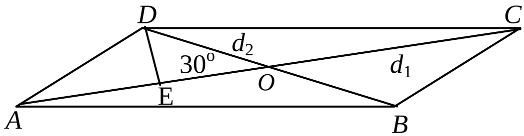


Но, позваћемо у помоћ и геометрију. Лако се доказује да дијагонале ма ког конвексног четвороугла деле четвороугао на делове за чије површине важи релација $P_1 \cdot P_3 = P_2 \cdot P_4$, где су P_1 и P_3, а такође P_2 и P_4, унакрсни делови. Нека су h и h_1 удаљености темена A и C од дијагонале BD (дужине нормала из A и C на BD). Тада је $P_1 = \frac{1}{2} DO \cdot h$ и $P_2 = \frac{1}{2} OB \cdot h$, па имамо однос $\frac{P_1}{P_2} = \frac{DO}{OB}$. На исти начин се добија $\frac{P_4}{P_3} = \frac{DO}{OB}$, па имамо $\frac{P_1}{P_2} = \frac{P_4}{P_3}$, односно $P_1 \cdot P_3 = P_2 \cdot P_4$. Ако је x маса поједеног парчета DOC, имаћемо x·200=120·300, одакле добијамо x=180 (g).

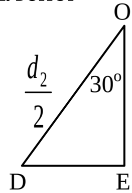
23. Колика је површина паралелограма чије се дијагонале $d_1 = 12$ cm и $d_2 = 9$ cm секу под углом од $30°$?

(A) 21 (B) 25 (C) 27 (D) 28 (E) 29

Решење: (C) 27



У овом задатку је веома погодно да се површина паралелограма посматра као збир површина два подударна троугла (ABC и ACD). Основица троугла ACD је дијагонала d_1, а висина DE. Остаје нам сада да висину DE изразимо помоћу d_1 или d_2 (јер су нам то једини познати подаци). Посматраћемо зато правоугли троугао EOD.
С обзиром да му је један оштар угао $30°$, закључујемо да му је други оштар угао $60°$, па тај троугао представља половину замишљеног једнакостраничног троугла чија је страница $\frac{d_2}{2}$.

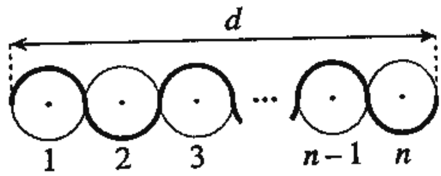


Дуж DE је тада половина странице тог замишљеног једнакостраничног троугла, па је она зато $DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_2}{4}$

Према томе, површина паралелограма је:

$$P = 2 \cdot \frac{AC \cdot DE}{2} = AC \cdot DE = d_1 \cdot \frac{d_2}{4} = \frac{d_1 \cdot d_2}{4} = \frac{12 \cdot 9}{4} = 3 \cdot 9 = 27$$

24. Гледајте слику! Дато је растојање d. Колика је укупна дужина подебљане линије?



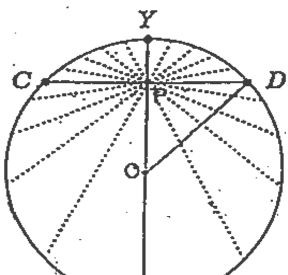
(A) dn (B) $dn\pi$ (C) $2\,dn\pi$ (D) $\frac{1}{2}d\pi$ (E) $d\pi$

Решење: (D) $\frac{1}{2}d\pi$. Пошто је $n \cdot 2r = d$, то је $nr = \frac{1}{2}d$, па ће тражена дужина бити $L = n \cdot r\pi = nr \cdot \pi = \frac{1}{2}d\pi$.

25. Тачка P је у кружници полупречника 15 cm, удаљена 9 cm од центра кружнице. Колико има различитих тетива које пролазе тачком P, а дужина им је изражена целим бројем cm? Од понуђених одабери тачан одговор. (Нацртај слику!)

(A) 1 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 29

Решење: (B) 12



Најдужа тетива кроз P је пречник XY дужине 30 cm, а најкраћа тетива кроз P је $CD \perp XY$ и дужина јој је 24 cm (јер је $OP^2 = OD^2 - OP^2 = 15^2 - 9^2 = 144$, те је $CP = PD = 12$). Дужине свих осталих тетива кроз P (чији су правци добијени ротацијом око P једне од поменутих) биће изражене реалним бројевима између 24 и 30. Строго између 24 и 30 је тачно 5 целих бројева, тј. $n \in \{25, 26, 27, 28, 29\}$. Свакој од ових вредности n одговарају по две тетиве кроз P дужине n, што са тетивама CD и XY даје укупно $2+5 \cdot 2=12$ тетива с целобројним мерним бројевима (израженим у cm), тј. целобројним бројем cm.